R06 Résoudre (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$. On donnera la forme algébrique de chaque solution.

Corrigé

Recherche

Écrire $-8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme a^4, $a \in \mathbb{C}$, permettrait de se ramener, par quotient, aux racines quatrièmes de l'unité.

On a :

$$-8 + 8i\sqrt{3} = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2^4 e^{i\frac{\pi}{6}\times 4} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4$$

L'équation de départ s'écrit donc aussi :

$$z^4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2e^{\frac{i\pi}{6}}}\right)^4 = 1$$

Or, les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$:

- $\dfrac{z}{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = 1 \Leftrightarrow z = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \Leftrightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\Leftrightarrow z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt{3} + i$

- $\dfrac{z}{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = i \Leftrightarrow z = 2e^{\frac{i\pi}{6}}i \Leftrightarrow z = \left(\sqrt{3} + i\right)i \Leftrightarrow z = -1 + i\sqrt{3}$
- $\dfrac{z}{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = -1 \Leftrightarrow z = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \times (-1) \Leftrightarrow z = -\sqrt{3} - i$
- $\dfrac{z}{2e^{\frac{i\pi}{6}}} = -i \Leftrightarrow z = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \times (-i) \Leftrightarrow z = \left(\sqrt{3} + i\right) \times (-i)$

$\Leftrightarrow z = 1 - i\sqrt{3}$

Conclusion : Les solutions de (E) sont $\boldsymbol{\sqrt{3} + i}$, $\boldsymbol{-1 + i\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{-\sqrt{3} - i}$ et $\boldsymbol{1 - i\sqrt{3}}$.